

4. Übung Numerik II

Mathias Bosewitz

Frederik Garbe

Stephan Grümmer

Tutor:

Tutorium:

1	2	3	Σ
4 TP	4 TP	4 TP	12 TP

WS 11/12

Maren-Wanda Wolf

Do: 12-14

2. Aufgabe

Punkte

Consider the initial value problem

$$x'(t) = \frac{\lambda x}{g(x)}, \quad t > 0, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

with $g(0) > 0$ and $\lambda < 0$ and $g \in C^1(\mathbb{R})$.

(a) Show that $x^* = 0$ is an asymptotically stable fixed point of (1).

Beweis: Es gilt $f(x) = \frac{\lambda x}{g(x)}$ mit Fixpunkt $x^* = 0$. f ist stetig differenzierbar um 0 mit

$$f'(x) = \frac{\lambda g(x) - \lambda x g'(x)}{g(x)^2} = \lambda \frac{g(x) - x g'(x)}{g(x)^2}.$$

Dafür:

$$\begin{aligned} \nu(Df(x^*)) &= \nu\left(\lambda \frac{g(0)}{g(0)^2}\right) \\ &= \nu\left(\lambda \frac{1}{g(0)}\right) \\ &= \lambda \frac{1}{g(0)} < 0 \end{aligned}$$

Daher ist x^* asymptotisch stabil. ✓

(b) Show that the semi-implicit time discretization

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\tau} = \frac{\lambda x_{k+1}}{g(x_k)}$$

is asymptotically stable, in the sense that $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$ for all τ and x_0 .

Beweis: Es gilt:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\tau} = \frac{\lambda x_{k+1}}{g(x_k)}$$
$$\Leftrightarrow x_{k+1} = x_k \frac{g(x_k)}{g(x_k) - \lambda\tau}$$

und damit:

$$\|x_{k+1}\| = \|x_k \frac{g(x_k)}{g(x_k) - \lambda\tau}\| < \|x_k\|, \text{ da } \lambda\tau < 0 \quad \checkmark$$

Da $g(0) > 0$ und g stetig ist folgt, dass $g > 0$ auf einer δ -Umgebung von 0. Also gilt für $|x - x_0| < \delta$, dass $g(x) > 0 \forall x \in [-x_0, x_0] := I$. Damit folgt, dass $\frac{g(x_k)}{g(x_k) - \lambda\tau}$ stetig ist auf I , da $g(x_k) \neq \lambda\tau$. Sei nun $0 < C = \max_{x \in I} \frac{g(x)}{g(x) - \lambda\tau} < 1$. Dann gilt

$$|\lim_{k \rightarrow \infty} x_k| \leq |\lim_{k \rightarrow \infty} x_0 \cdot C^k| = |x_0| \cdot |\lim_{k \rightarrow \infty} C^k| = 0 \quad \checkmark$$

Also folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$ für alle τ und die Diskretisierung ist asymptotisch stabil.

✓
4/4 TP

(4.1) $\Psi^{t+\tau, t} x = x + \sum_{i=1}^s b_i k_i$

$$k_i = f\left(t + c_i \tau, x + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j\right)$$

Autohomisiert: $\dot{y}(t) = \left(f(t, x)\right) = F(y(t)) \quad y(t) = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$

z.z.: $\bar{\Psi}^\tau \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi^{t+\tau, t} x \\ t + \tau \end{pmatrix}$

Ausrechnen: $\bar{\Psi}^\tau y = y + \tau \sum_{i=1}^s \bar{b}_i \bar{k}_i$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$

$$\bar{k}_i = F\left(y + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} \bar{k}_j\right) = \begin{pmatrix} f\left(t + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} \bar{k}_j, x + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} \bar{k}_j\right) \\ t + \tau \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{k}_i = \begin{pmatrix} f\left(t + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} \bar{k}_j, x + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} \bar{k}_j\right) \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$\Rightarrow \bar{k}_i$ bestimmt $\forall i: \bar{k}_i^t = 1 \checkmark$

$\Rightarrow \bar{k}_i^x = f\left(t + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij}^x, x + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} \bar{k}_j^x\right)$

$$a_{ij}^x = \int_0^{c_i} L_j d\theta$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^s a_{ij}^x = \int_0^{c_i} \sum_{j=1}^s L_j d\theta = \int_0^{c_i} 1 d\theta = c_i \checkmark$$

$\Rightarrow \bar{k}_i^x = f\left(t + \tau c_i, x + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} \bar{k}_j^x\right) \checkmark$

$\Rightarrow \bar{k}_i^x = k_i \checkmark$

$$\Rightarrow \bar{\Psi}^\tau \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \tau \sum_{i=1}^s b_i k_i \\ t + \tau \sum_{i=1}^s b_i \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi^{t+\tau, t} x \\ t + \tau \end{pmatrix}$$

There are people who don't think this is trivial



Schreibweise:

$$\bar{k}_i = \begin{pmatrix} \bar{k}_i^x \\ \bar{k}_i^t \end{pmatrix}$$

4.2a

$$\dot{x}(t) = \frac{\lambda x}{g(x)}$$

$$t > 0$$

$$x(0) = x_0$$

$$C^1 \Rightarrow g(0) > 0, \lambda < 0$$

" g_0 "

$$x^* = 0$$

Linearisierung:

$$\left. \frac{d}{dx} (\dot{x}(t)) \right|_{x=0}$$

$$=$$

$$\frac{\lambda g(x) - \lambda x g'(x)}{(g(x))^2} \Big|_{x=0}$$

$$=$$

$$\frac{\lambda g_0}{g_0} = \lambda$$

Fixpunkt, da $\dot{x}(t) = \frac{\lambda \cdot 0}{g_0} = 0$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \lambda x + o(|x|)$$

$\lambda < 0 \Rightarrow$ Linearisiertes System

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \lambda \tilde{x}$$

ist asymptotisch stabil

$\Rightarrow$
Satz
(blabla)

System ist auch asymptotisch stabil

4.2b

z.z.:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\tau} = \frac{\lambda x_{k+1}}{g(x_k)}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$$

$$\forall \tau, x_0$$

Aufgabe 3

a) Definiere

$$h(t) := \|x(t) - y(t)\|^2 = \langle x(t) - y(t), x(t) - y(t) \rangle$$

$$\begin{aligned} h'(t) &= 2 \langle x'(t) - y'(t), x(t) - y(t) \rangle \\ &= 2 \langle f(x(t)) - f(y(t)), x(t) - y(t) \rangle \leq 0 \end{aligned}$$

(f dissipativ)

$\Rightarrow h$ ist monoton fallend

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \|x(t) - y(t)\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, \infty)} \sqrt{h(t)}$$

$$= \sqrt{h(0)} = \|x_0 - x_0 - \delta_{x_0}\|_{\infty} \leq \delta \quad \checkmark$$

Die Wahl von $\delta = \varepsilon$

erfüllt Definition 2.7.7 (7) $\checkmark$

b) z. z.: $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$

$$h'(t) \leq 2\mu \|x(t) - y(t)\|^2 = 2\mu h(t) \leq 0.$$

Ang.: $\exists \varepsilon < 0$, so dass

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} h'(t) < \varepsilon \quad \text{ist.}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty \quad \checkmark$$

Widerspruch $h(t) > 0$.

$$\text{Also folgt } \limsup_{t \rightarrow \infty} h'(t) = 0 \quad \checkmark$$

$$\text{zusammen mit } h'(t) \leq 2\mu h(t) \leq 0$$

ergibt dass $\limsup_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0 \quad \checkmark$

aus der Monotonie von $h(t)$
folgt $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - y(t)\| = 0$$

#